

# Conception de différents contrôleurs pour une articulation R-P

Stefan Bracher

## Résumé

Des contrôleurs PID + compensation de gravité, couple pré-calculé, contrôle par glissement, contrôle adaptive Slotine-Li et le contrôle en espace opérationnel sont conçus pour une articulation R-P. A l'aide de simulations, leur comportements sont visualisées et des différences identifiées.

## Indexe

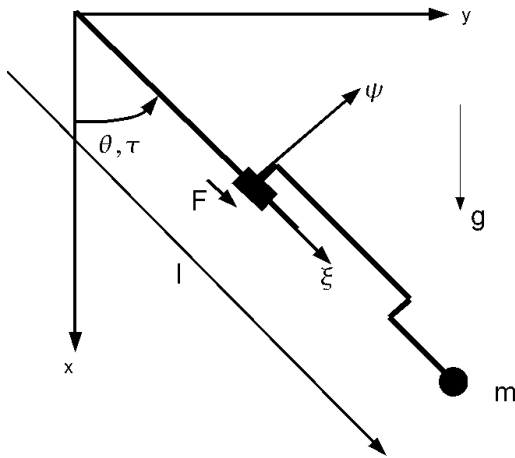
Conception de différents contrôleurs pour une articulation R-P.....	1
A. Introduction.....	2
B. Le modèle mathématique.....	3
C. Contrôle avec contrôleur PID plus compensation de gravité .....	5
1. Le système de contrôle.....	5
2. Résultat.....	6
D. Contrôle avec couple pré-calculé.....	7
1. Le système de contrôle.....	7
1.1 Compensateurs.....	7
1.2 Le contrôleur cinématique.....	8
1.3 Conversion dynamique.....	8
2. Résultat.....	9
E. Contrôle par glissement.....	11
1. Le système de contrôle.....	11
1.1 Le contrôleur cinétique.....	11
1.2 Le contrôleur de vitesse.....	12
2. Résultat.....	12
F. Contrôle adaptive Slotine-Li.....	14
1. Le système de contrôle.....	14
1.1 Le contrôle.....	14
1.2 Estimateur d'état.....	14
2. Résultat.....	16
2.1 Réponse à une commande dérivable.....	16
2.2 Mis à jour de la masse.....	16
G. Contrôle dans l'espace opérationnel (par glissement).....	18
1. Le système de contrôle.....	18
1.1 Le contrôleur cinétique.....	18
1.1 La cinématique inverse.....	18
2. Résultat.....	20
H. Conclusion.....	22

## A. Introduction

Pour le contrôle d'une articulation robotique plusieurs formes de contrôle sont possibles. Il existe des solutions pour réaliser la commande dans l'espace articulaire ainsi que en espace opérationnel. Mais quel type de contrôle est adéquat pour quelle situation?

Pour répondre à cette question, des simulations des contrôleurs PID + compensation de gravité, couple pré-calculé, contrôle par glissement, contrôle adaptive Slotine-Li et le contrôle en espace opérationnel sont fait pour un système robotique simple, soit une articulation R-P , ce que permet de comparer les performances.

## B. Le modèle mathématique



L'articulation consiste en deux membrures. La première est connecté avec un joint rotatif à la base et la deuxième se connecte à la première avec un joint prismatique. Les coordonnées de l'effecteur dans l'espace d'articulation sont alors  $\theta$  et  $l$ , pendant que ces coordonnées dans l'espace opérationnel sont:

$$x = l \cdot \cos(\theta)$$

Eq. B.1

$$y = l \cdot \sin(\theta)$$

Eq. B.2

Il est supposé que toute la masse du manipulateur est concentré au fin de la chaîne.

Figure 1: Le modèle de l'articulation

Les équations des sommes de forces dans l'espace  $\xi, \psi$  sont:

$$\sum F_{\xi} = \cos(\theta) \cdot m \ddot{x} + \sin(\theta) \cdot m \ddot{y}$$

Eq. B.3

$$\sum F_{\psi} = -\sin(\theta) \cdot m \ddot{x} + \cos(\theta) \cdot m \ddot{y}$$

Eq. B.4

En dérivant les équations B1 et B2 on obtient:

$$\dot{x} = -\dot{l} \cdot \cos(\theta) - l \cdot \sin(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

Eq. B.5

$$\ddot{x} = -\ddot{l} \cdot \cos(\theta) - 2 \cdot \dot{l} \sin(\theta) \dot{\theta} - l \cdot \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - l \cdot \sin(\theta) \ddot{\theta}$$

Eq. B.6

et

$$\dot{y} = \dot{l} \cdot \sin(\theta) + l \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

Eq. B.7

$$\ddot{y} = \ddot{l} \sin(\theta) + 2 \cdot \dot{l} \cos(\theta) \dot{\theta} - l \cdot \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + l \cdot \cos(\theta) \ddot{\theta}$$

Eq. B.8

En insérant ces dérivés, ainsi que la gravité dans les équations des sommes de forces on obtient:

$$\sum F_{\xi} = F + m \cdot g = \cos(\theta) \cdot m \ddot{x} + \sin(\theta) \cdot m \ddot{y}$$

Eq. B.9

et

$$\sum F_{\psi} = \frac{\tau}{l} - \sin(\theta) \cdot mg = -\sin(\theta) \cdot m \ddot{x} + \cos(\theta) \cdot m \ddot{y}$$

Eq. B.10

ce que donne

$$F = m\ddot{l} - m l \dot{\theta}^2 - m g \cos(\theta)$$

Eq. B.11

$$\tau = m l^2 \ddot{\theta} + 1 \cdot 2 \cdot m \dot{\theta} \dot{l} + 1 \cdot m g \sin(\theta)$$

Eq. B.12

Ce que peut être mis en forme:

$$\begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{l} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m l \dot{\theta} \\ 2L m \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{l} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m g \cos(\theta) \\ 1 \cdot m g \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Eq. B.13

Le même résultat peut aussi être obtenu avec un approché physique, qui demande beaucoup moins de calcul:

La force nécessaire pour agrandir l est égale:

Inertie – Force centrifuge + Force de gravité contre la direction du mouvement

$$F = m\ddot{l} - F_{cent} - F_g \cdot \cos(\theta)$$

Eq. B.14

La torque nécessaire pour agrandir theta est égale:

Inertie + Torque du à la force Coriolis + Torque du à la gravité contre la direction du mouvement

$$\tau = J\ddot{\theta} + 1 \cdot F_{cor} + 1 \cdot \sin(\theta) \cdot F_g$$

Eq. B.15

Sachant que

$$J = m \cdot l^2, F_{cent} = m l \dot{\theta}^2, F_g = m g \text{ et } F_{cor} = 2 \cdot m \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{l}$$

le même résultat (Eq. B11 et B12) est obtenu.

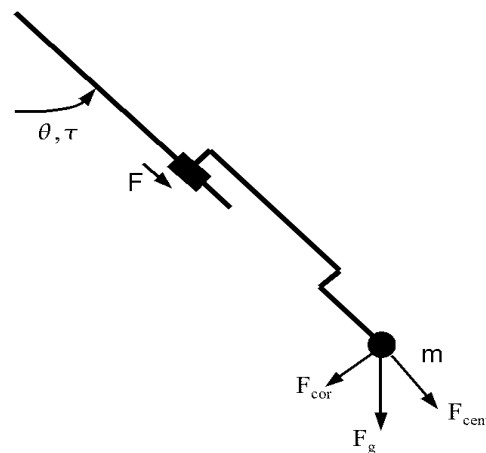


Figure 2: Le modèle physique

Une troisième vérification peut être fait en regardant les unités:

Pour l'équation B11 on a:

$$F = m\ddot{l} - m l \dot{\theta}^2 - m g \cos(\theta) \rightarrow [N] = [kg \cdot m/s^2] - [kg \cdot m/s^2] - [kg \cdot m/s^2]$$

Eq. B.16

Et pour B12

$$\tau = m l^2 \ddot{\theta} + 1 \cdot 2 \cdot m \dot{\theta} \dot{l} + 1 \cdot m g \sin(\theta) \rightarrow [N \cdot m] = [kg \cdot m^2/s^2] + [kg \cdot m^2/s^2] + [kg \cdot m^2/s^2]$$

Eq. B.17

Le résultat du modèle mathématique est alors vérifié plusieurs fois et on peut l'utiliser sans devoir craindre qu'il y a un erreur.

## C. Contrôle avec contrôleur PID plus compensation de gravité

### 1. Le système de contrôle

Le contrôleur PID avec compensation de gravité est probablement la façon la plus facile pour contrôler le système en question. Pour que l'influence de la gravité ne perturbe pas tout le temps le PID, celle-ci est compensée séparément.

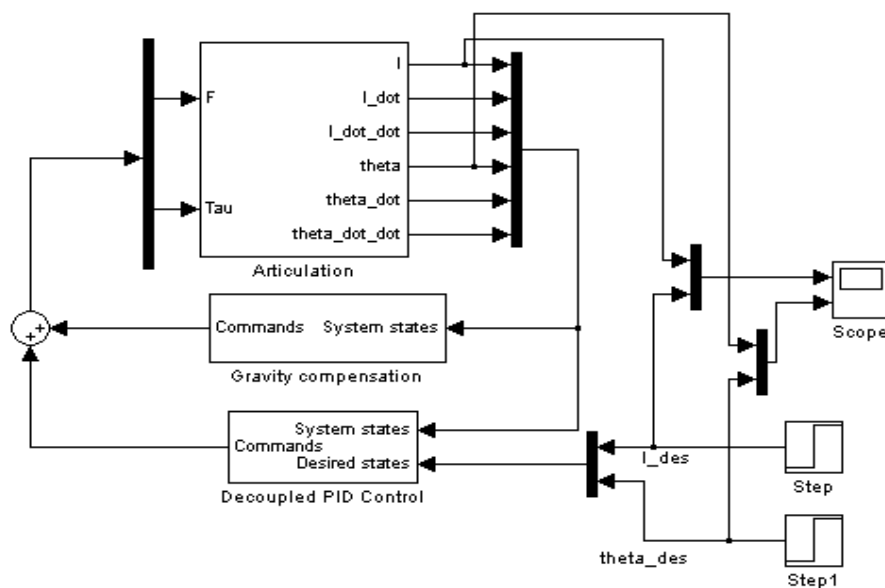


Figure 3: Schéma-bloc de la commande avec PID + compensation de gravité.

Les les couples demandé pour compenser la gravité sont trouvés à l'aide des équations B.11 et B.12.

$$F_g = -m g \cos(\theta)$$

Eq. C.1

$$\tau = l \cdot m g \sin(\theta)$$

Eq. C.2

Le contrôle lui même est fait par deux contrôleurs PID découplés, un pour l'articulation en angle et l'autre pour l'articulation en longueur.

## 2. Résultat

La réponse du système contrôlé à un échelon est:

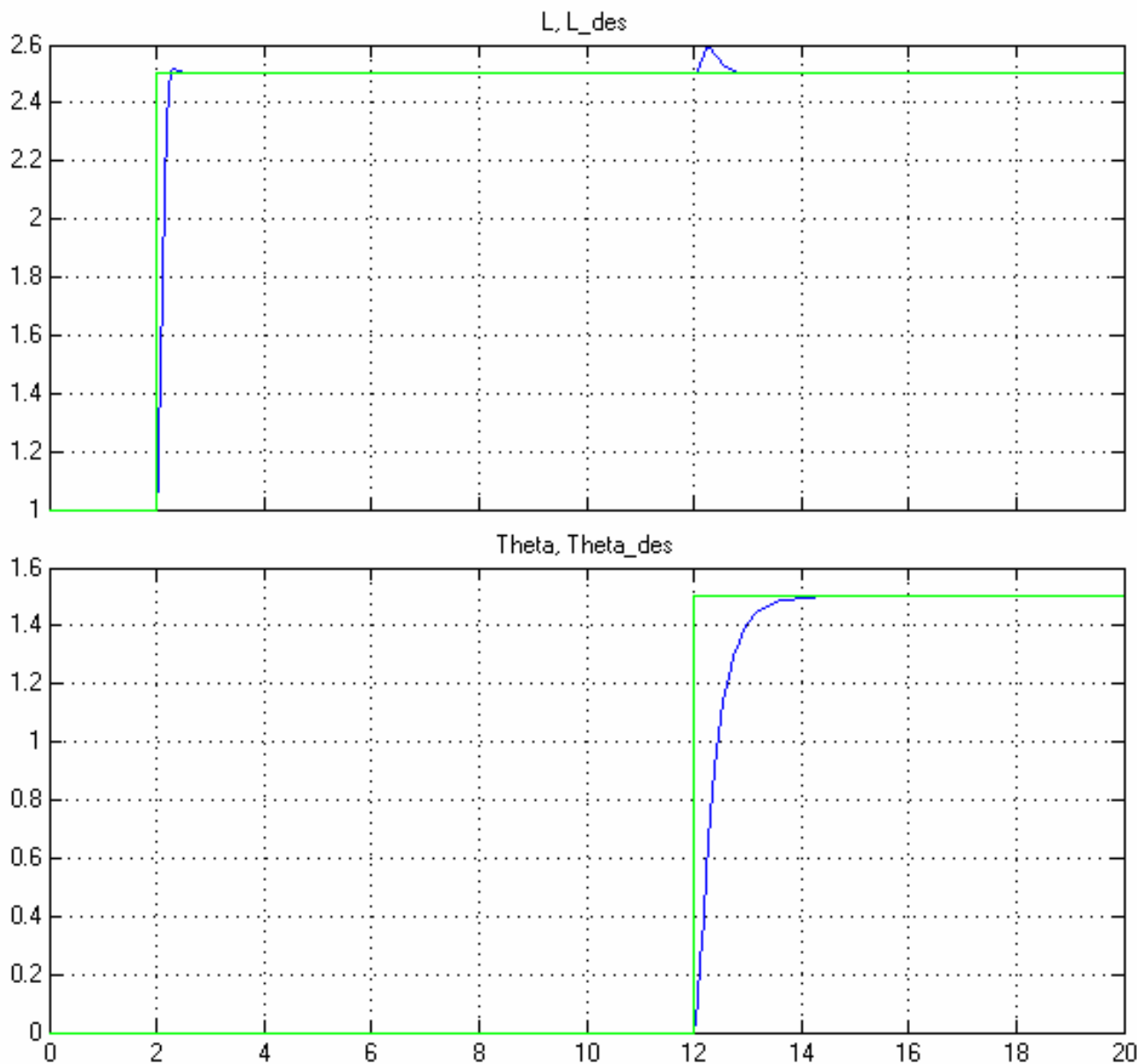


Figure 4: Réponse à l'échelon du système contrôlé

Les réponses à des changements en longueur ainsi que en angle sont bien. Dans la réponse à l'échelon en angle, on voit l'influence de la force centrifugale causé par la rotation, sur la longueur. Celle-ci agit comme perturbation au contrôle en longueur.

## D. Contrôle avec couple pré-calculé

### 1. Le système de contrôle

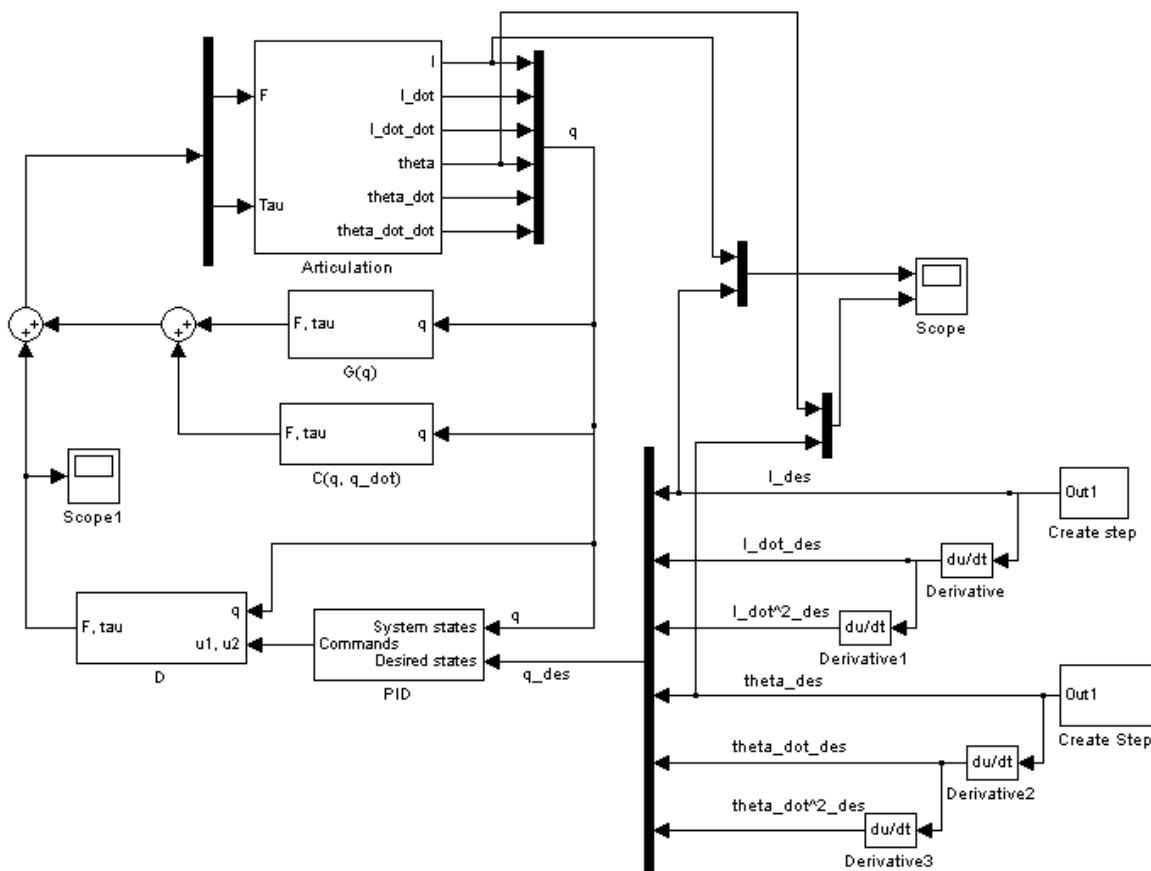


Figure 5: Le schéma-bloc du système contrôlé par la méthode du couple pré-calculé

Le contrôle de couplé pré-calculé ne prend en compte ne pas seulement la compensation de gravité, mais aussi les forces causées par le mouvement, soit la force de Coriolis et la force centrifugal. En plus, le contrôleur PID n'agit pas directement sur les forces, mais sur un changement de vitesse nécessaire pour rendre l'état du système à l'état désiré. C'est que dans une deuxième étape que ce changement de vitesse nécessaire est traduit en forces et couples.

#### 1.1 Compensateurs

Les matrices des compensateurs sont trouvées de l'équation B.13

$$\begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{L} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -mL\dot{\theta} \\ 2Lm\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{L} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mg \cos(\theta) \\ 1 \cdot mg \sin(\theta) \end{bmatrix} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q})$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -m g \cos(\theta) \\ l \cdot m g \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Eq. D.1

et

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -mL\dot{\theta} \\ 2Lm\dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

Eq. D.2

Et les forces de compensation deviennent:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}_g = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}_c = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$$

Eq. D.3 et Eq. D.4

## 1.2 Le contrôleur cinématique

Les changements en vitesse linéaire et vitesse de rotation nécessaires pour rendre l'état du système à l'état désiré, sont calculés avec un contrôleur de forme suivant:

$$\ddot{\mathbf{q}}^x = \ddot{\mathbf{q}}_{des} + \mathbf{K}_p (\mathbf{q}_{des} - \mathbf{q}) + \mathbf{K}_d (\dot{\mathbf{q}}_{des} - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{K}_i \int (\mathbf{q}_{des} - \mathbf{q}) dt$$

Eq. D.5

avec

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} L \\ \theta \end{bmatrix}$$

## 1.3 Conversion dynamique

Pour la conversion des accélérations demandés  $\ddot{\mathbf{q}}^x$  en forces et couples, la matrice  $\mathbf{D}$  de l'équation B.13 est utilisé:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}_{\text{Compensateur}} = \mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}$$

Eq. D.6

avec

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix}$$

Eq. D.7



## 2. Résultat

Comme ce contrôleur utilise les dérivés de premier et deuxième ordre de la fonction de commande, il faut donner une commande d'états qui est dérivable deux fois. Une fonction de ce type élimine aussi le risque de casser les moteurs d'une vrai articulation robotique à cause des chocs de couples, si des échelons sont demandés.

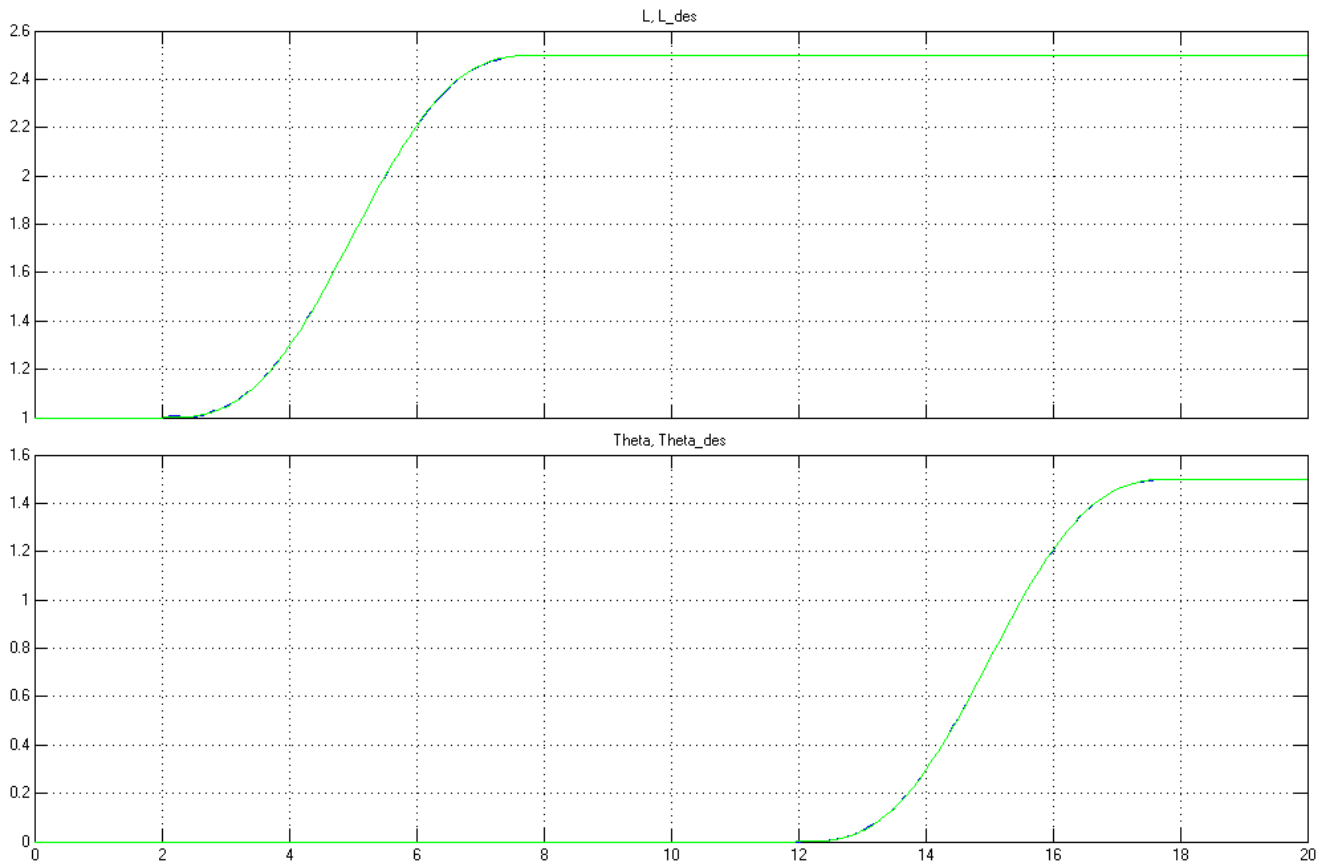


Figure 6: Réponse du système contrôlé à des changements en longueur et en angle dérivables

Il est visible que l'état réelle suit l'état désiré très bien.

Pour pouvoir comparer la performance avec le contrôle simple réalisé sous section C, on peut tricher un petit peu et envoyer un échelon en position et angle, mais fixer les vitesses et accélérations à zéro.

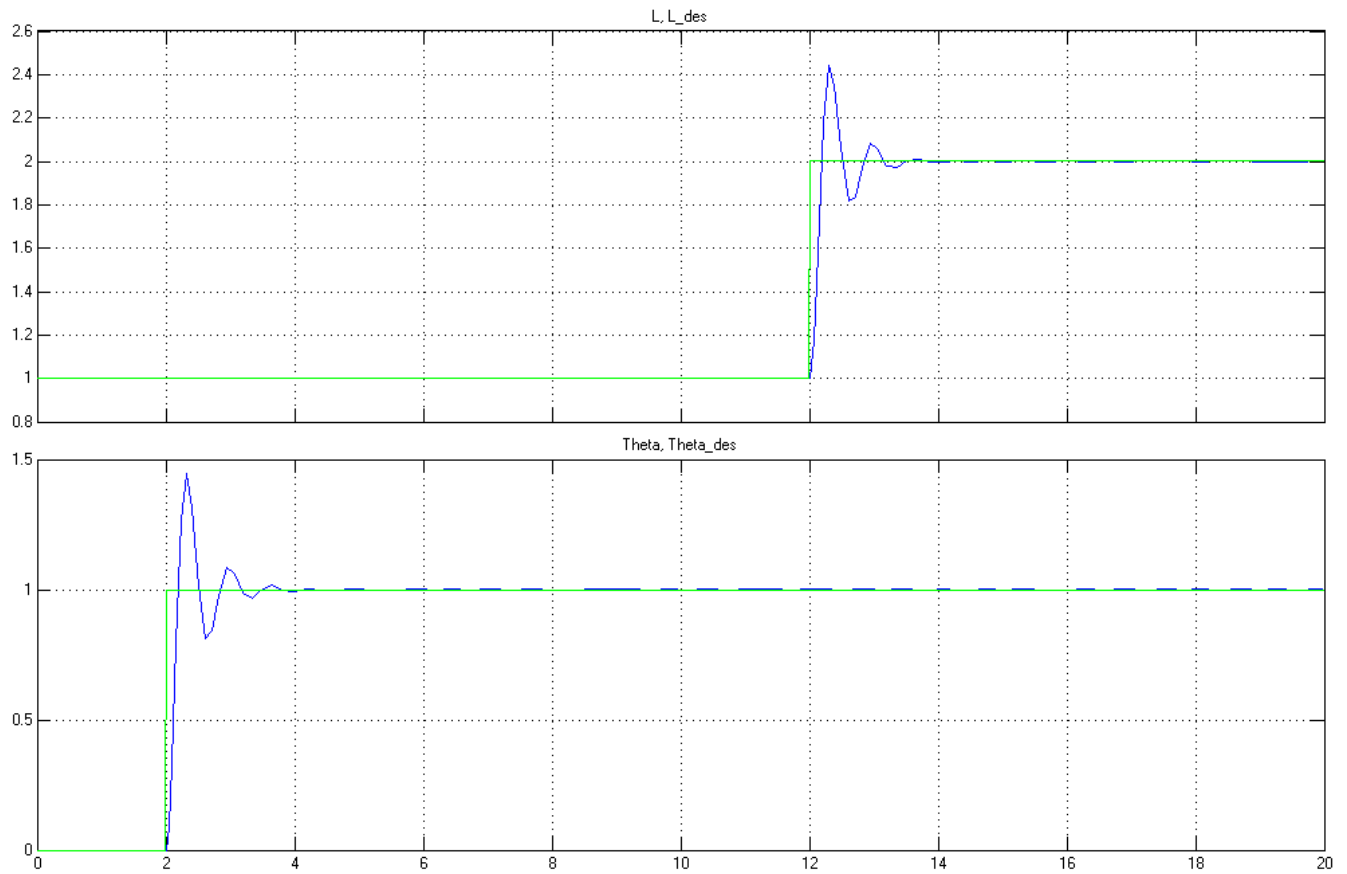


Figure 7: Réponse du système contrôlé à des changements en longueur et en angle de type échelon

Cette fois, la suite n'est plus tellement parfaite, à cause d'une petite oscillation. Mais elle est aussi bien que celle du contrôleur PID + compensation de gravité. On voit que ne pas seulement la gravité, mais aussi les forces de Coriolis et centrifugales sont compensées avec succès.



### 1.2 Le contrôleur de vitesse

Dans une deuxième étape, le contrôleur de vitesse, calcule les forces et couples nécessaires pour rendre les vitesses du systèmes  $\dot{\mathbf{q}}$  à celles spécifiées avec le contrôleur cinétique  $\dot{\mathbf{q}}^x$ . Inclus dans le contrôleur est aussi une compensation de gravité et de forces Coriolis/centrifugal.

$$\begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}^x + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}^x + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{q}}^x - \dot{\mathbf{q}})$$

Eq. E.2

avec

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} L \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} K_L & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix}$$

et les matrice  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{G}$  comme déterminé sous point D.

### 2. Résultat

La réponse du système à une fonction de commande deux fois dérivable est:

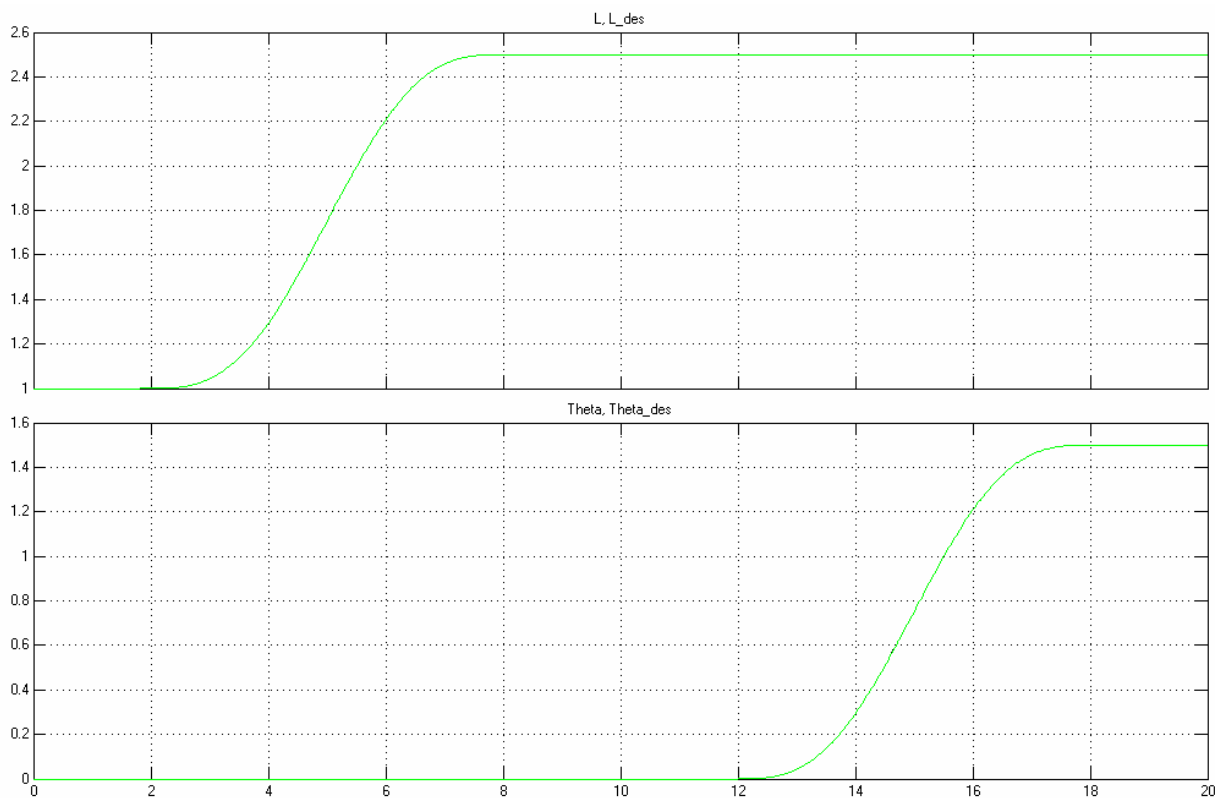


Figure 9: Réponse du système contrôlé à des changements en longueur et en angle dérivables

Les traces de la commande et de la réponse sont presque identiques, aucune différence est visible à l'échelle de la figure.

Encore une fois, une réponse à l'échelon peut être forcée en définissant les vitesses désirés étant zéro tout le temps.

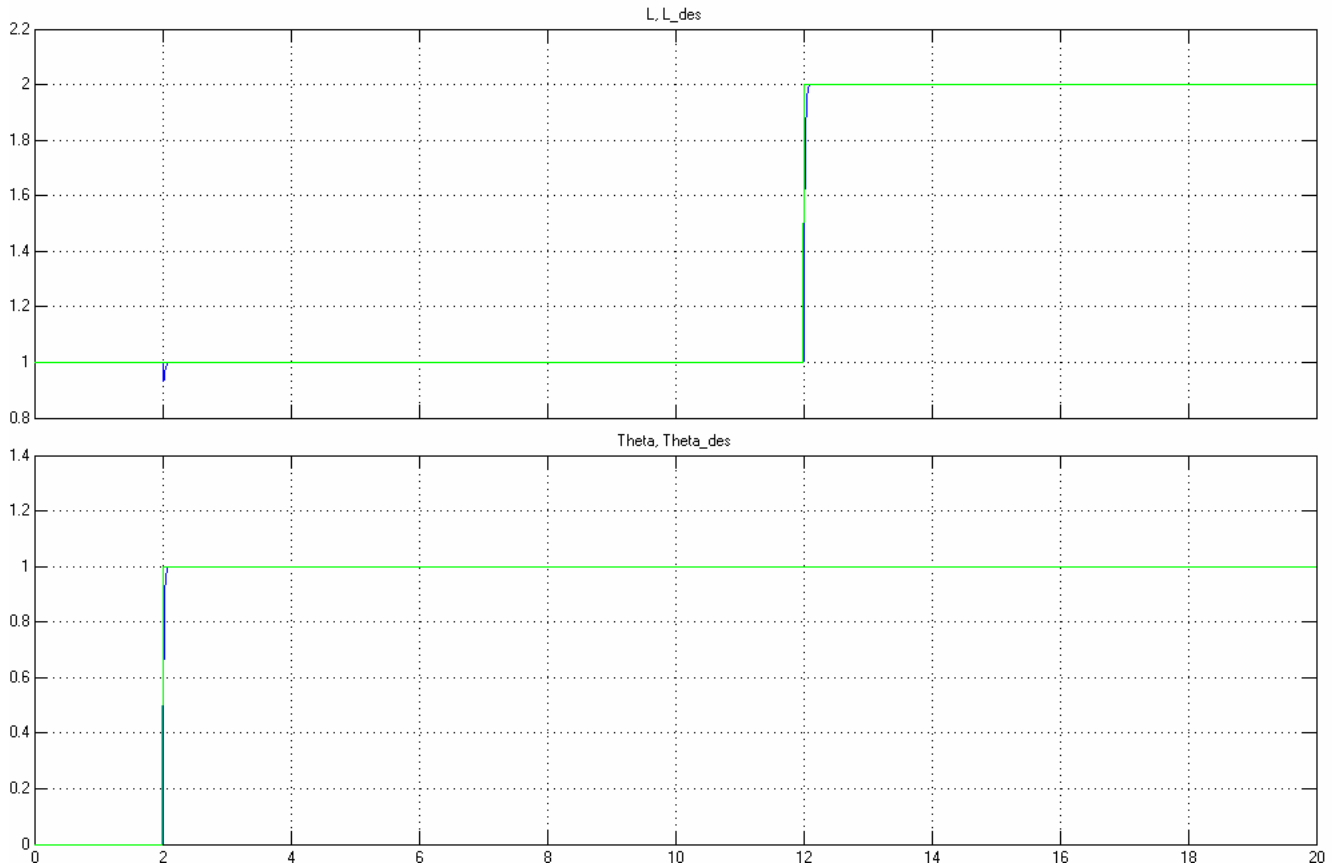


Figure 10: Réponse du système contrôlé à des changements en longueur et en angle de type échelon

Aussi dans ce cas, la réponse est bien. On voit qu'une vitesse angulaire très grande ( $T=2s$ ), cause des erreurs de longueur, même avec la matrice de compensation  $C$  présent. C'est parce que en définissant les vitesses désirés étant zéro, celle-ci perd sa puissance, car elle est multiplie avec  $\dot{q}^x$ .

## F. Contrôle adaptative Slotine-Li

### 1. Le système de contrôle

Dans tous les méthodes de contrôle présenté jusqu'ici, il a été supposé qu'on puisse identifier tous les paramètres du système. Mais normalement ce n'est pas le cas, plus, il se peut que ces paramètres changent avec le temps (Par exemple la masse d'un satellite).

#### 1.1 Le contrôle

Le contrôleur cinétique, qui ne contient pas des paramètres du système, reste inchangé. Ce n'est pas le cas avec le contrôleur de vitesse. L'idée de contrôle adaptative est de séparer les paramètres non connus dans un seul vecteur. La nouvelle équation du contrôleur de vitesse est alors:

$$\tau = D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \dot{q}^x)\alpha$$

*Eq. F.1*

#### 1.2 Estimateur d'état

Pour trouver le vecteur  $\alpha$ , un estimateur est introduit. À partir de l'erreur entre les vitesses réelles et les vitesses commandées par le contrôleur cinétique, il calcule le changement  $\dot{\alpha}$  qui peut être la cause de l'erreur.

$$\dot{\alpha} = \Gamma^{-1} Y'(q, \dot{q}, \dot{q}^x)(\dot{q}^x - \dot{q})$$

*Eq. F.2*

Dans le système de l'articulation R-P il n'y a qu'un paramètre, la masse  $m$  et  $\Gamma$  devient

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_L \\ \Gamma_{\text{theta}} \end{bmatrix}$$

En intégrant  $\dot{\alpha}$ , avec une valeur de  $\alpha$  initiale estimée,  $\alpha$  est mis constamment à jour afin d'améliorer la performance du contrôle.

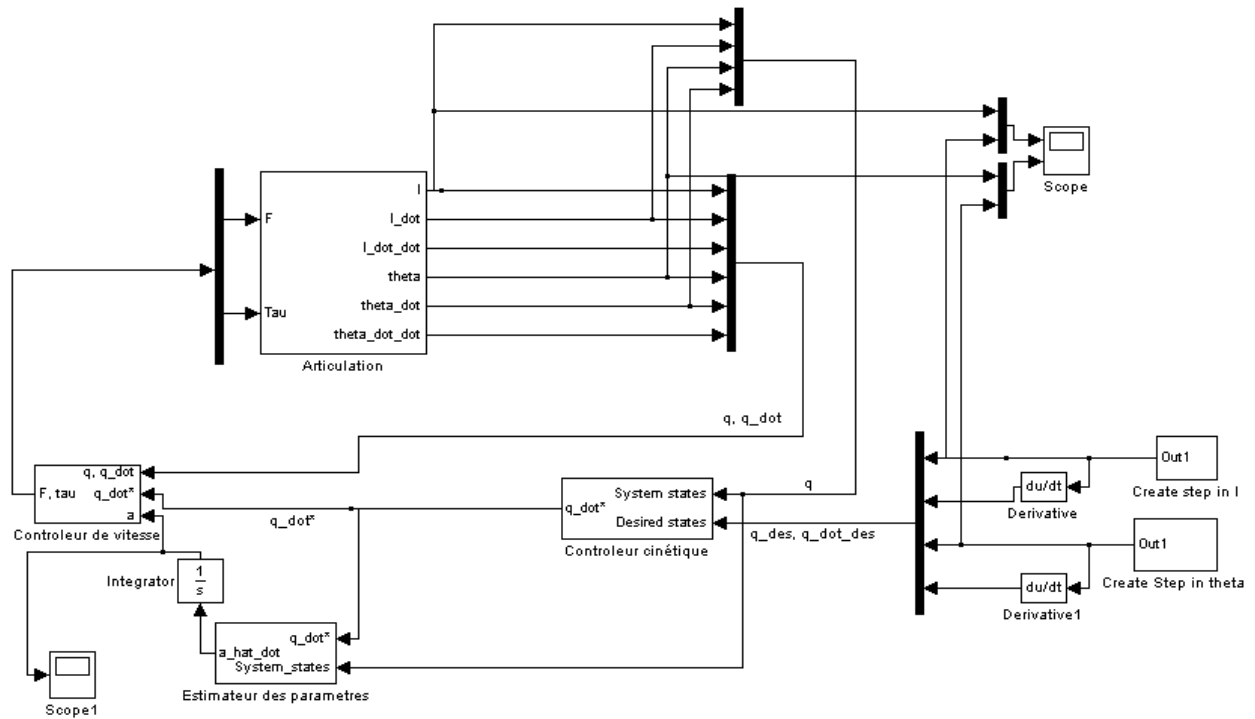
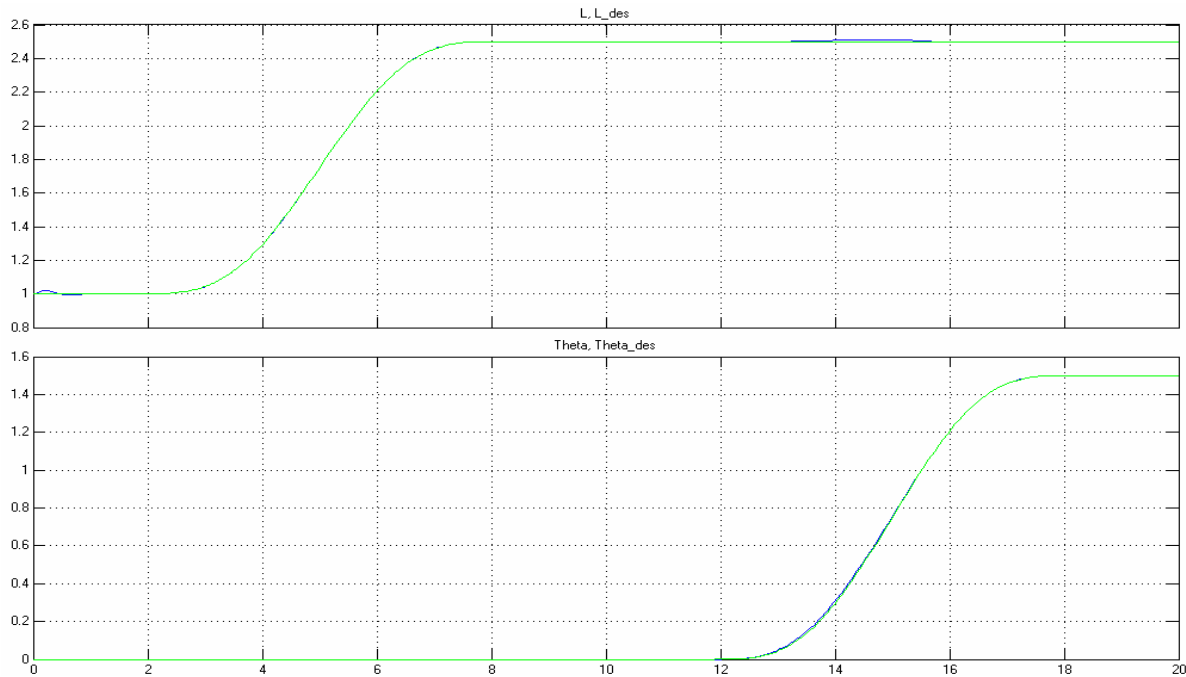


Figure 11: Le schéma-bloc du système contrôlé adaptive Slotine-Li (avec glissement)

## 2. Résultat

### 2.1 Réponse à une commande dérivable

La réponse du système à une commande dérivable est:



On peut observer que au début ainsi que quand la commande pour  $\theta$  change, le contrôleur à besoin d'un peu de temps pour s'adapter, mais que cette adaption ce passe bien.

### 2.2 Mis à jour de la masse

Dans le système present, la masse estimée était de 1kg, pendant que la vrai masse était de 1.4kg.



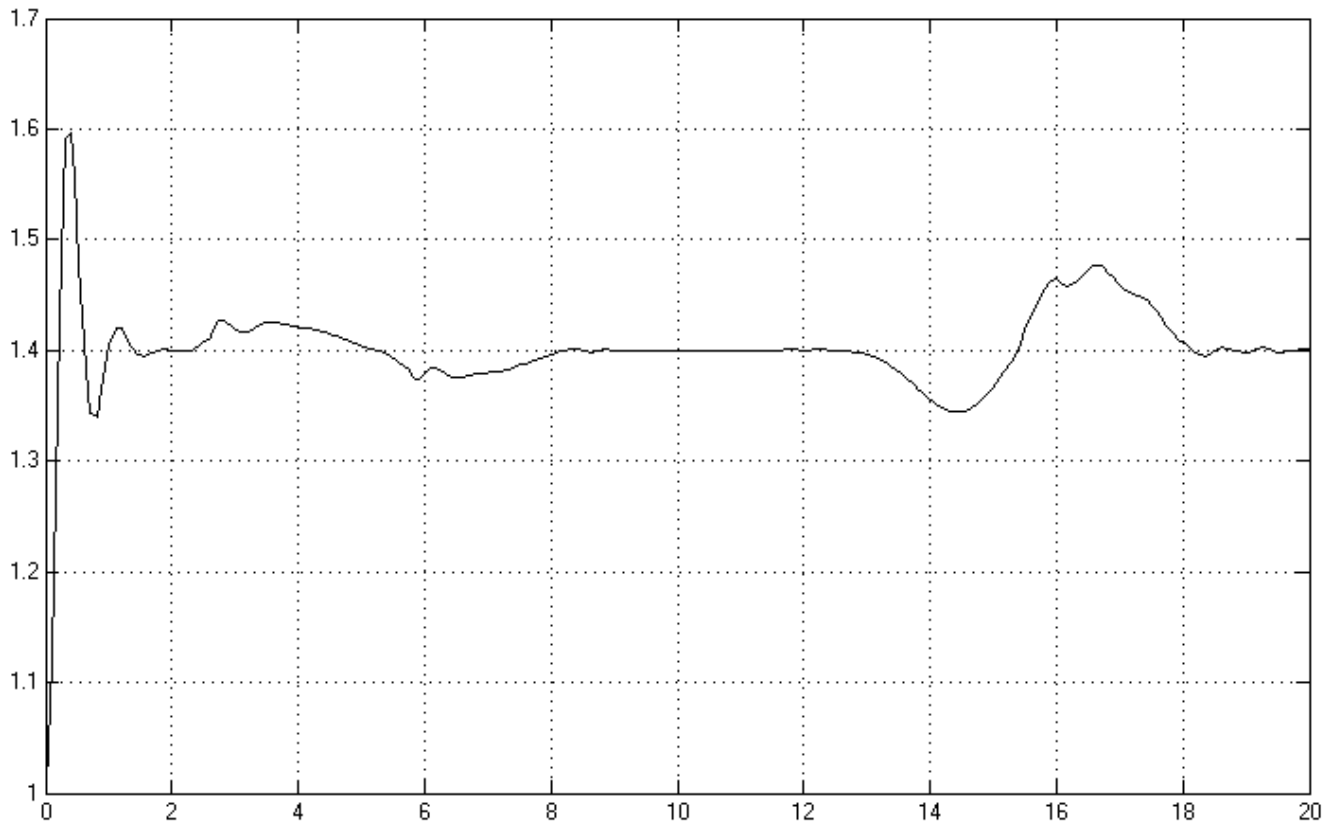


Figure 13: Mis à jour de la masse estimée par l'estimateur

On voit la correction rapide de la masse estimée. Une autre observation est, que une fois la « vrai » masse à été trouvée ( $T=10s$ ), l'estimateur essaye de réajuster même si l'erreur vient de la commande et ne pas d'une masse fautive ( $t=13s$ ).

La solution à ce problème serait de, si on sait que la masse ne change pas, d'arrêter l'estimateur une fois que la sortie c'est stabilisée, et si on sait que la masse change lentement, d'installer un filtre passe-bas afin d'éliminer l'influence des erreurs causé par une commande à plus haute fréquence.

## G. Contrôle dans l'espace opérationnel (par glissement)

### 1. Le système de contrôle

Les méthodes présentés réalisent le contrôle dans l'espace articulaire. Mais normalement c'est l'espace opérationnel qui interesse.

#### 1.1 Le contrôleur cinétique

La forme du contrôleur cinétique ne doit pas changer, mais les signaux traitées changent. Les mesures venant du système sont maintenant les coordonnées  $x$ ,  $y$  et leurs drivées au lieu de la longueur et l'angle. Aussi la commande se fait maintenant en coordonnées  $x$  et  $y$ .

Le contrôleur cinétique reste à la forme:

$$\dot{\mathbf{q}}^x = \dot{\mathbf{q}}_{des}^x + \Lambda(\mathbf{q}_{des}^x - \mathbf{q})$$

*Eq. E.1*

mais avec avec

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ et } \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

#### 1.1 La cinématique inverse

Pour pouvoir utiliser le même controleur de vitesse que avant, la cinématique inverse doit être introduit, qui translate les consignes en espace opérationnel dans l'espace articulaire.

La cinématique est calculé avec l'aide des matrices Jacobiennes.

Pour la cinématique directe on a

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{dir} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

*Eq. E.2*

et pour la cinématique inverse:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{inv} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

*Eq. E.3*

Les deux Jacobiens sont calculés à l'aide de l'équation B.5 et B.7 et sont:

$$J_{dir} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -l \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & l \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Eq. E.4

et

$$J_{inv} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot 1 - \frac{\sin^2(\theta)}{L \cdot \cos^3(\theta) + \cos(\theta) \cdot \sin^2(\theta)} & \frac{\sin(\theta)}{L \cdot \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ \frac{-\sin(\theta)}{L \cdot \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} & \frac{1}{L \cdot \cos(\theta) + \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}} \end{bmatrix}$$

Eq. E.5

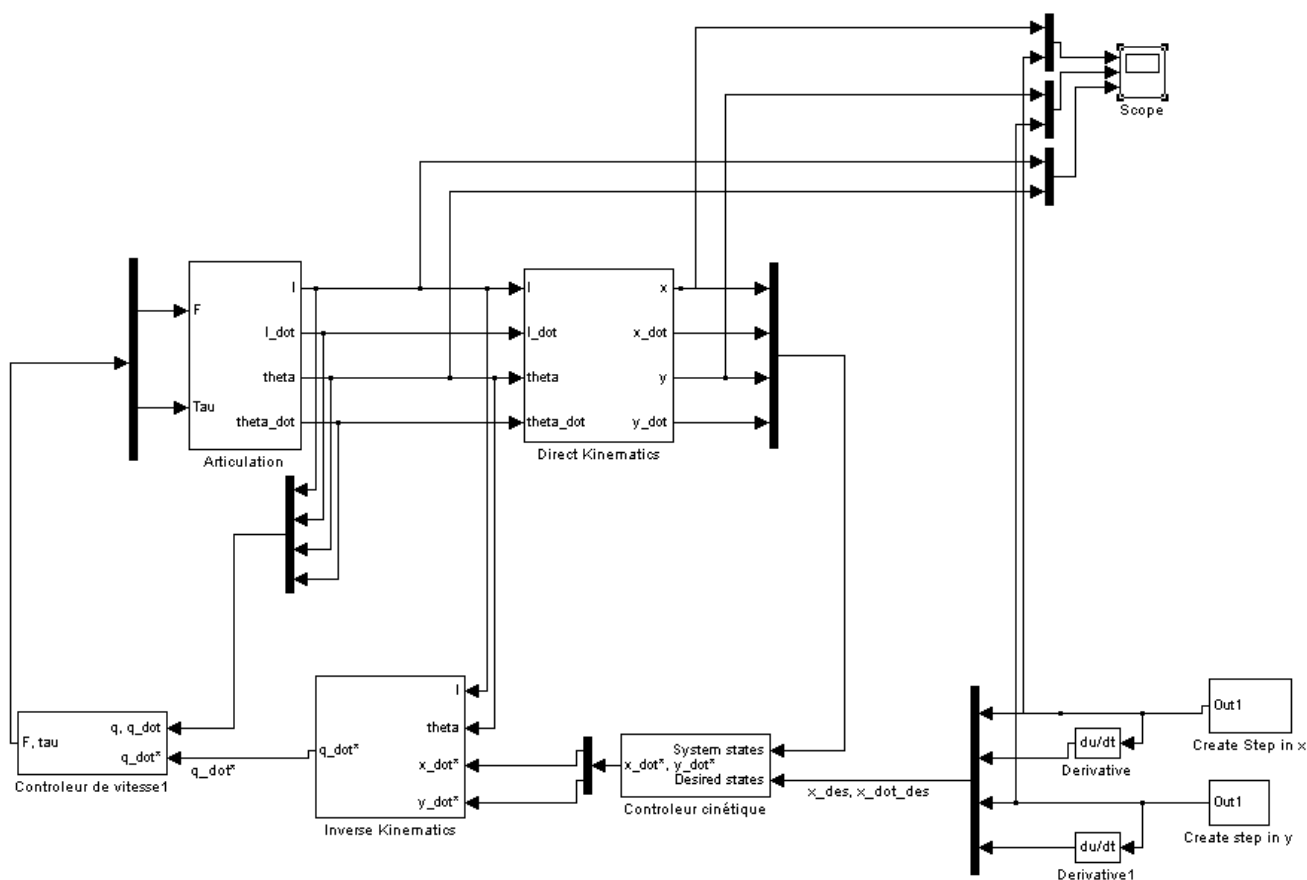


Figure 14: Le schéma-bloc du système contrôlé

## 2. Résultat

Comme la commande est faite dans l'espace opérationnel, un changement d'une variable,  $x$  ou  $y$ , peut, dépendant de la posture, causer des changements en  $\theta$  et  $L$  en même temps. Pour un changement dérivable on obtient:

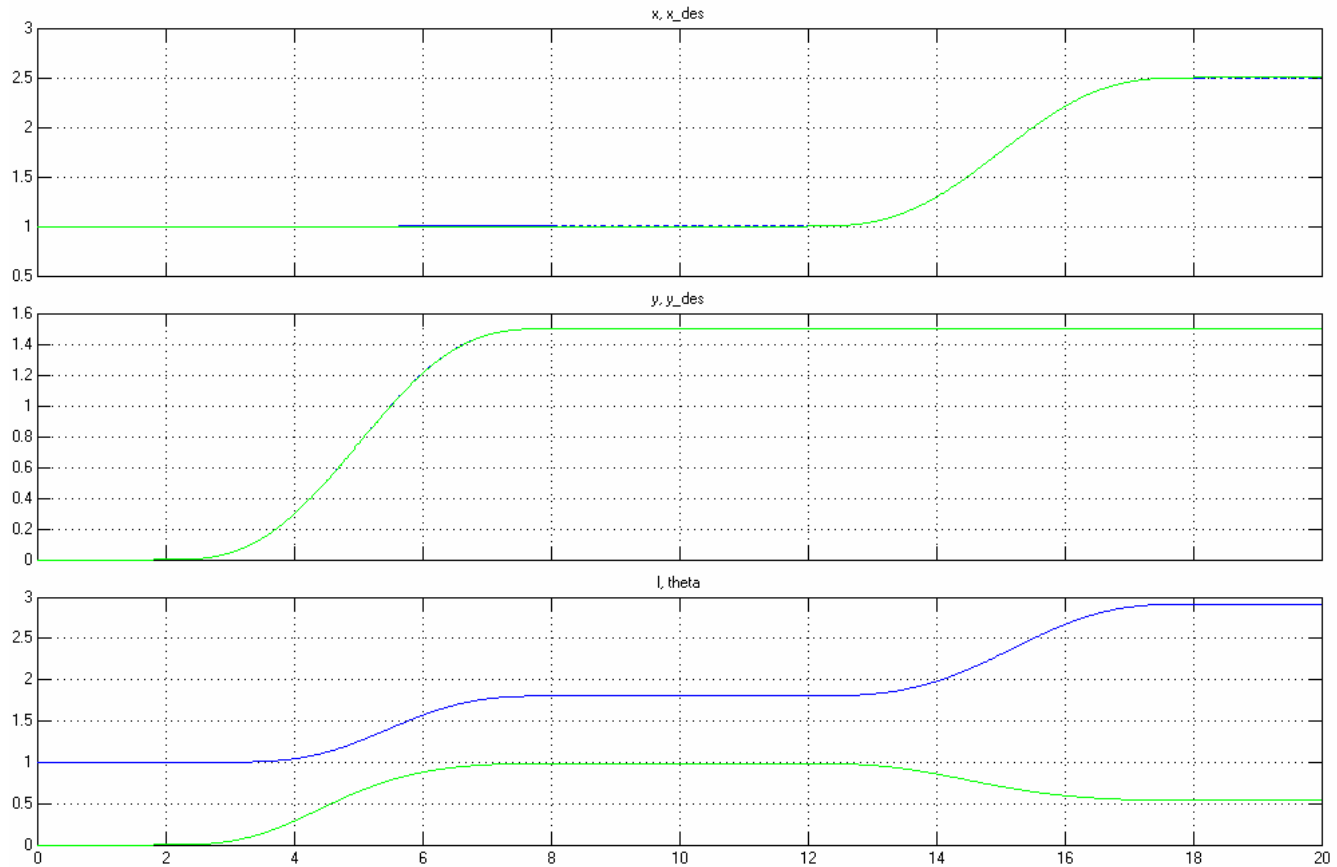


Figure 15: Réponse du système contrôlé à des changements en  $x$  et  $y$  dérivables

Si long qu'on ne passe pas par une singularité de la cinématique inverse, le résultat obtenu est très bien.

Aussi un échelon peut être commande, tout en fixant les vitesses désirés en  $x$  et  $y$  à zéro.

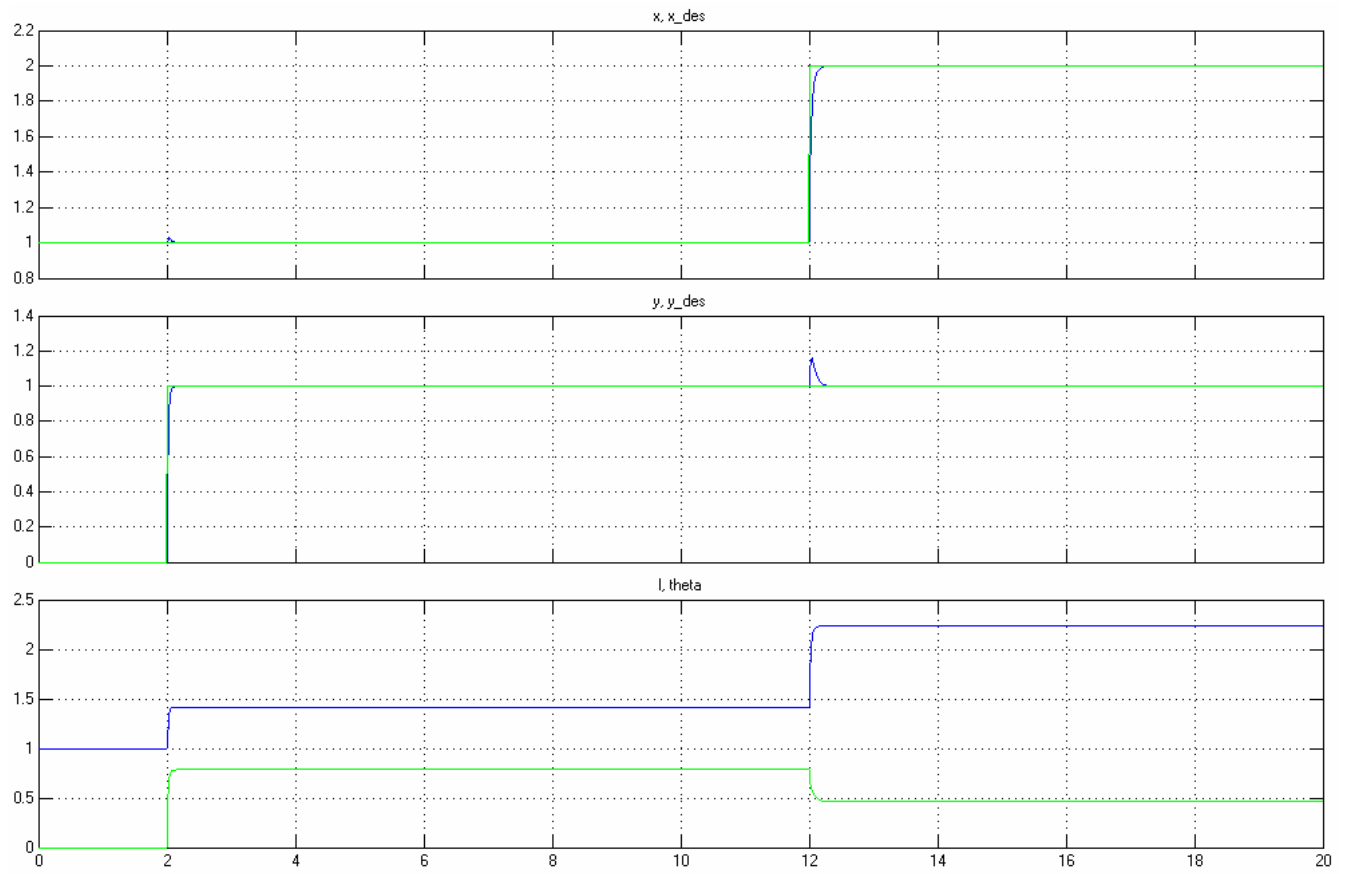


Figure 16: Réponse du système contrôlé à des échelons en  $x$  et  $y$

## H. Conclusion

Plusieurs types de contrôleurs ont été réalisés et leur comportement simulé pour la même articulation. Pour des vitesses angulaires et linéaires petites, le contrôleur le plus simple, PID plus compensation de gravité est complètement suffisant. Mais pour des vitesses élevées, il est meilleur d'utiliser la méthode du couple pré-calculé, qui ne compose pas seulement l'influence de la gravité, mais aussi celles de la force centrifuge et de la force de Coriolis. Le contrôle par glissement tel quel n'a pas d'avantages directs visibles par rapport au couple pré-calculé. Mais en combinaison avec un estimateur de paramètres Slotine-Li, formant un contrôle adaptative, elle est capable de régler un système dont on ne connaît pas les paramètres ou, qui a des paramètres qui changent avec le temps. Le contrôle dans l'espace opérationnel finalement est le plus pratique parce que normalement on veut commander les coordonnées de l'effecteur et ne pas les angles et longueurs des membrures du robot.